

## Практикалық сабақ №2

Тақырыбы: Көп айнымалы функциялардың дербес туындылары. Күрделі функцияларды дифференциалдау.

Мақсаты: Функцияларды дифференциалдау.

**Мысал 1.** Берілген  $z = xy^3$  функцияның толық дифференциалын табу керек.

**Шешуі:** Бұл функцияның дербес туындыларын табайық.  
 $z'_x = y^3, z'_y = 3xy^2$  демек,  $dz = y^3 dx + 3xy^2 dy$ .

**Мысал 2.**  $u = e^{x-2y}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = t^3$  болсын. Сонда  
 $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cdot \cos t - 2e^{x-2y} \cdot 3t^2 = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2)$

**Мысал 3.** Егер  $z = x^2 - y^2$ ,  $x = u \cos \vartheta$ ,  $y = u \sin \vartheta$  болса. Онда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \cos \vartheta - 2y \sin \vartheta; \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = -2xu \sin \vartheta - 2yu \cos \vartheta$$

**Мысал 4.** Берілген  $z = \arctg \frac{x}{y}$  функциясының екінші ретті дербес туындыларын табыңыз.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left( -\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Енді екінші рет дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

**Мысал 5.**  $z = 5x^2 + 3xy - 6y^3$  болса,  $d^2z$  неге тең болады?

**Шешуі:** Алдымен берілген функцияның екінші ретті дербес туындыларын табамыз, олар:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 18y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -36y$$

Енді  $d^2z = 10dx^2 + 6dxdy - 36ydy^2$ .

**Мысал 6.**  $z = 2x^3 + 3y^2 + 1$  функцияның  $P(1;2)$  нүктесінде  $Ox$  өсімен  $120^\circ$  бұрыш жасайтын бағыттағы туындысын табындар.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 12,$$

$$\cos \alpha = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \sin \alpha = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Туындыны табамыз:  $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 12\frac{\sqrt{3}}{2} = -3 + 6\sqrt{3}.$

**Мысал 7.**  $z = xy^2$  функцияның  $P(1;1)$  нүктесіндегі градиентін табу керек.

**Шешуі:** Функцияның дербес туындыларын және  $P(1;1)$  нүктесіндегі мәндерін есептейміз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 2.$$

Сонда,  $\text{grad} z = \vec{i} + 2\vec{j}.$

**Мысал 8.**  $\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 u}{dy dx}$  теңдікті тексеру керек, егер:  $u = x^{y^2}.$

**Шешуі:** Берілген функцияның дербес туындыларын есептейік

$$\frac{du}{dx} = y^2 x^{y^2-1}, \quad \frac{du}{dy} = 2yx^{y^2} \ln x,$$

$$\frac{d^2 u}{dy dx} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x), \quad \frac{d^2 u}{dx dy} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x).$$

Осыдан, аралас туындылар  $0 < x < \infty, -\infty < y < \infty$  анықталу облысының барлық  $(x, y)$  нүктелерінде орындалатын  $\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 u}{dy dx}$  теңдікке келеміз.

*Аудиториялық жұмысы:* Көп айнымалы функциялардың дербес туындыларын және дифференциалдарын, күрделі функциялардың дербес туындыларын, бағыт бойынша туындыны, жоғарғы ретті туындыларды және дифференциалдарды табу: [8] №№ 3213-3229 (тақ), 3235-3241 (тақ), 3245 а)г), 3256-3260 (жұп), 3269-3273 (тақ), 3283, 3285, 3288, 3294, 3341. Тейлор формуласы: [8] №№ 3581, 3583, 3594.

#### Үй жұмысы

№№ 3214-3228 (жұп), 3236-3242 (жұп), 3245 б)в)д), 3257-3261 (тақ), 3270-3274 (жұп), 3284, 3286, 3289-3295 (тақ), 3346. №№ 3582, 3597.